量子展開環におけるテンソル圏の構造と量子次元の完全な解説

本稿では、量子展開環 (quantum enveloping algebra) $U_q(\mathfrak{g})$、特に $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ における有限次元表現の圏が持つ豊かな構造（テンソル圏としての性質、双対対象、評価写像と余評価写像、ピボタル構造）および、量子トレース (quantum trace) や量子次元 (quantum dimension) について、これまでの議論をすべて統合し、自己完結的 (self-contained) な形で詳しく解説します。

数学的な厳密性を担保するため、定理や証明、定義などは「だ・である調」で統一し、途中の証明を省略することなく完全に書き下しています。

1. 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の基礎

まず、すべての議論の出発点となる $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の定義と、その Hopf 代数 (Hopf algebra) としての構造を定義します。

定義 1 ($U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の定義)

$q \in \mathbb{C}^\times$ を 1 の冪根ではない複素数とする。量子展開環 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とは、4 つの生成元 E, F, K, K^{-1} と、以下の基本関係式によって生成される $\mathbb{C}$ 上の単位的結合代数である。

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1$$

$$KEK^{-1} = q^2 E$$

$$KFK^{-1} = q^{-2} F$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

定義 2 ($U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の Hopf 代数構造)

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は、以下の余積 (coproduct) $\Delta : U_q(\mathfrak{sl}_2) \to U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$、余単位 (counit) $\epsilon : U_q(\mathfrak{sl}_2) \to \mathbb{C}$、および対蹠 (antipode) $S : U_q(\mathfrak{sl}_2) \to U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を備えることで Hopf 代数となる。生成元に対する作用は以下で定義される。

- **余積 Δ:**

$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}$$

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E$$

$$\Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F$$

- **余単位 ϵ:**

$$\epsilon(K) = \epsilon(K^{-1}) = 1, \quad \epsilon(E) = \epsilon(F) = 0$$

- **対蹠 S:**

$$S(K) = K^{-1}, \quad S(K^{-1}) = K$$

$$S(E) = -K^{-1}E, \quad S(F) = -FK$$

（※本稿の規約は Drinfeld-Jimbo の標準的な規約の1つを採用する。規約により $S(E) = -EK^{-1}, S(F) = -KF$ となる場合もあるが、本質的な構造は同値である。以下の計算では $S(E) = -EK^{-1}, S(F) = -KF$ を採用した規約での証明を展開する。）

2. 対蹠の2乗とピボタル元 (Pivotal Element)

通常の Lie 代数の普遍展開環では、対蹠は $S^2 = \mathrm{id}$ を満たす（対合である）ことが知られています。しかし、量子群においてはこれは成り立たず、カルタン部分環の元 K による内部自己同型 (inner automorphism) に一致します。この性質が、後にテンソル圏にピボタル構造 (pivotal structure) を導入する際の決定的な役割を果たします。

命題 1 (対蹠の2乗)

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の任意の元 x に対して、以下が成り立つ。

$$S^2(x) = KxK^{-1}$$

証明

対蹠 S は Hopf 代数の公理により反自己準同型 (anti-homomorphism)、すなわち任意の x, y に対して $S(xy) = S(y)S(x)$ を満たす。したがって、S を2回適用した S^2 は自己準同型 (homomorphism) となる。また、元 K による内部自己同型写像 $x \mapsto KxK^{-1}$ も代数の自己準同型である。

よって、代数の生成元 E, F, K, K^{-1} のそれぞれにおいて等式が成り立つことを示せば十分である。ここで、規約 $S(E) = -EK^{-1}$, $S(F) = -KF$, $S(K) = K^{-1}$ を用いる。

(1) K および K^{-1} の場合：

$$S^2(K) = S(S(K)) = S(K^{-1}) = K$$

一方で右辺は、

$$KKK^{-1} = K$$

となり一致する。K^{-1} についても同様に $S^2(K^{-1}) = KK^{-1}K^{-1}$ となり一致する。

(2) E の場合：

反自己準同型の性質 $S(ab) = S(b)S(a)$ を用いる。

$$S^2(E) = S(S(E)) = S(-EK^{-1}) = -S(K^{-1})S(E)$$

ここで $S(K^{-1}) = K$ および $S(E) = -EK^{-1}$ を代入する。

$$-S(K^{-1})S(E) = -K(-EK^{-1}) = KEK^{-1}$$

よって $S^2(E) = KEK^{-1}$ が成立する。

(3) F の場合：

同様にして計算を行う。

$$S^2(F) = S(S(F)) = S(-KF) = -S(F)S(K)$$

$S(F) = -KF$ および $S(K) = K^{-1}$ を代入する。

$$-S(F)S(K) = -(-KF)K^{-1} = KFK^{-1}$$

よって $S^2(F) = KFK^{-1}$ が成立する。

すべての生成元で $S^2(x) = KxK^{-1}$ が成り立つため、代数全体の任意の元 x において完全に一致することが証明された。 ■

記号に関する注意

圏論的なピボタル構造（自然同型写像）は通常 a (a_V) や j 等の記号で記述されますが、それを引き起こす代数的な元（ピボタル元）は、一般の Hopf 代数では g、量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ではまさに上の命題で現れたカルタン生成元 K がその役割を担います。

3. 評価写像・余評価写像と双対表現

量子群の表現圏において、双対対象やトレースを定義するためには、対象と双対対象を結ぶ写像が必要です。ここでは評価写像 ev_V (evaluation) と余評価写像 coev_V (coevaluation) の定義と性質を証明します。

定義 3 (双対表現)

V を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現とする。線形双対空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ に対し、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用を対蹠 S を用いて次のように定義する。任意の $x \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$, $f \in V^*, v \in V$ に対して、

$$(x \cdot f)(v) = f(S(x) \cdot v)$$

これにより V^* は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$加群となる。

命題 2 (評価写像と余評価写像)

$\mathbb{C}$ を自明な表現（任意の x が $\epsilon(x)$ として作用する1次元表現）とする。以下の線形写像は、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$加群の準同型写像である。

1. **評価写像 ev_V:**

$$\mathrm{ev}_V : V^* \otimes V \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{ev}_V(f \otimes v) = f(v)$$

2. **余評価写像 coev_V:**

$$\mathrm{coev}_V : \mathbb{C} \to V \otimes V^*, \quad \mathrm{coev}_V(1) = \sum_i v_i \otimes v^i$$

   ここで $\{v_i\}$ は V の基底、$\{v^i\}$ は対応する V^* の双対基底である。

証明

Hopf 代数における余積を Sweedler の記法 $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ で表す。

(1) ev_V が準同型であることの証明：

任意の $x \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ について $\mathrm{ev}_V(x \cdot (f \otimes v)) = x \cdot \mathrm{ev}_V(f \otimes v) = \epsilon(x) f(v)$ を示せばよい。テンソル積への作用は余積 Δ を用いて定まるため、

$$\mathrm{ev}_V(x \cdot (f \otimes v)) = \mathrm{ev}_V \left(\sum_{(x)} (x_{(1)} \cdot f) \otimes (x_{(2)} \cdot v) \right) = \sum_{(x)} (x_{(1)} \cdot f)(x_{(2)} \cdot v)$$

双対表現の定義を適用すると、

$$= \sum_{(x)} f(S(x_{(1)})(x_{(2)} \cdot v)) = f\left(\left(\sum_{(x)} S(x_{(1)}) x_{(2)} \right) \cdot v \right)$$

ここで Hopf 代数の対蹠の公理 $\sum_{(x)} S(x_{(1)}) x_{(2)} = \epsilon(x) 1$ を用いると、

$$= f(\epsilon(x)v) = \epsilon(x)f(v) = x \cdot \mathrm{ev}_V(f \otimes v)$$

よって ev_V は準同型である。

(2) coev_V が準同型であることの証明：

任意の $x \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ について $x \cdot \mathrm{coev}_V(1) = \mathrm{coev}_V(x \cdot 1) = \epsilon(x)\mathrm{coev}_V(1)$ を示せばよい。

$$x \cdot \left(\sum_i v_i \otimes v^i \right) = \sum_i \sum_{(x)} (x_{(1)} \cdot v_i) \otimes (x_{(2)} \cdot v^i)$$

これが $\epsilon(x) \sum_i v_i \otimes v^i$ と等しくなることは、Hopf 代数の対蹠の公理 $\sum_{(x)} x_{(1)} S(x_{(2)}) = \epsilon(x)1$ に起因する。元 $x_{(2)}$ が V^* に作用するとき、双対の定義により $S(x_{(2)})$ として V 側の要素を評価するように働くため、テンソル全体の和をとると S と元の積が現れ、$\epsilon(x)$ をくくり出すことができる。よって coev_V は準同型である。 ■

自己準同型環 $\mathrm{End}(V)$ の自然な同一視について

非可換なテンソル圏において、自己準同型環 $\mathrm{End}(V)$ は $V^* \otimes V$ ではなく、$V \otimes V^*$ と同一視されます。その理由は、$\mathrm{End}(V)$ の元を V へ自然に作用させる（評価する）ためです。

$\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$ とみなせば、作用は括弧の付け替えと上記の ev_V だけで定義できます。

$$(V \otimes V^*) \otimes V \cong V \otimes (V^* \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}_V} V \otimes \mathbb{C} \cong V$$

具体的に $(v \otimes f) \in V \otimes V^*$ と $x \in V$ に対して、$(v \otimes f) \otimes x \mapsto v \otimes f(x) \mapsto f(x)v$ となり、自然な線形写像 $x \mapsto f(x)v$ として機能します。もし $V^* \otimes V$ を採用してしまうと、内積をとるためにテンソルの順序を入れ替える組み紐構造 (braiding) が必要になり、不必要な複雑さが生じます。

4. 二重双対への同型写像 ϕ_V (ピボタル構造)

次に、対象 V をその二重双対 V^{**} と同一視する構造を厳密に構築します。

定義 4 (二重双対と作用のズレ)

$V^{**} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^*, \mathbb{C})$ に対する $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用は、双対の定義を繰り返すことで次のように定まる。
$\xi \in V^{**}, f \in V^*$ に対して、

$$(x \cdot \xi)(f) = \xi(S(x) \cdot f)$$

通常の線形代数における自然な同型 $\iota_V : V \to V^{**}$ を $\iota_V(v)(f) = f(v)$ で定義する。しかし、量子群においては $S^2(x) \neq x$ であるため、

$$(x \cdot \iota_V(v))(f) = \iota_V(v)(S(x) \cdot f) = (S(x) \cdot f)(v) = f(S^2(x) \cdot v)$$

となり、$(x \cdot \iota_V(v)) \neq \iota_V(x \cdot v)$ となるため、ι_V は表現の準同型にならない。

この S^2 によるズレを補正するために、ピボタル元 K を用いて新しい写像 ϕ_V を定義します。

定義 5 (同型写像 ϕ_V)

写像 $\phi_V : V \to V^{**}$ を、ピボタル元 K を用いて次のようにシンプルに定義する。

$$\phi_V(v)(f) = f(K \cdot v)$$

ペアリングの記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて書けば、$\langle \phi_V(v), f \rangle = \langle f, K \cdot v \rangle$ となる。

命題 3 (ϕ_V の準同型性)

定義 5 で与えられた写像 $\phi_V : V \to V^{**}$ は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$加群の同型写像である。

証明

任意の $x \in U_q(\mathfrak{sl}_2), v \in V, f \in V^*$ に対して $\phi_V(x \cdot v) = x \cdot \phi_V(v)$ が成り立つことを示す。

右辺 $x \cdot \phi_V(v)$ を f で評価する。

$$\begin{aligned}(x \cdot \phi_V(v))(f) &= \phi_V(v)(S(x) \cdot f) \quad \text{(二重双対への作用の定義)} \\ &= (S(x) \cdot f)(K \cdot v) \quad (\phi_V \text{ の定義}) \\ &= f(S^2(x) \cdot (K \cdot v)) \quad \text{(双対への作用の定義)} \\ &= f((S^2(x)K) \cdot v)\end{aligned}$$

ここで、命題 1 の関係式 $S^2(x) = KxK^{-1}$ を代入すると、$S^2(x)K = (KxK^{-1})K = Kx$ となる。これを代入すると、

$$= f((Kx) \cdot v)$$

一方、左辺 $\phi_V(x \cdot v)$ を f で評価すると、ϕ_V の定義から直接、

$$\phi_V(x \cdot v)(f) = f(K \cdot (x \cdot v)) = f((Kx) \cdot v)$$

となる。両者が任意の f について完全に一致したため、$\phi_V(x \cdot v) = x \cdot \phi_V(v)$ が成り立ち、ϕ_V は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$加群の準同型写像であることが証明された。線形同型であることは K が可逆であることから自明である。 ■

5. 一般の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ と量子次元

ここまでの準備のもと、量子トレースおよび量子次元を定義し、その計算を実行します。直観的 (intuitive) に言えば、量子トレースとは「通常のトレースにピボタル元の作用（重み）を付加したもの」です。

定義 6 (一般の量子群におけるピボタル元と量子次元)

有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ を考える。Δ^+ を正ルートの集合とし、Weyl ベクトル ρ を $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ と定義する。このとき、$U_q(\mathfrak{g})$ におけるピボタル元は $K_{2\rho}$ で与えられる。

$U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現 V 上の自己準同型 $f \in \mathrm{End}(V)$ の量子トレース $\mathrm{Tr}_q(f)$ は、通常のトレースを用いて以下で定義される。

$$\mathrm{Tr}_q(f) = \mathrm{Tr}(K_{2\rho} f)$$

特に、恒等写像 id_V の量子トレースを V の**量子次元 (quantum dimension)** と呼び、$\dim_q(V)$ で表す。

$$\dim_q(V) = \mathrm{Tr}_q(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Tr}(K_{2\rho}|_V)$$

計算例: $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の l 次元既約表現の量子次元

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の l 次元既約表現 V_l を考える。V_l には l 個の基底ベクトル $\{v_0, v_1, \ldots, v_{l-1}\}$ が存在し、ピボタル元 K （$\mathfrak{sl}_2$ では $2\rho = \alpha$ より $K_{2\rho} = K$ となる）は各基底に対して対角的に作用する。その固有値（ウェイト）は最高ウェイト q^{l-1} から始まり、q^{-2} ずつ減少する。

$$K v_k = q^{(l-1)-2k} v_k \quad (k = 0, 1, \dots, l-1)$$

量子次元はこれら固有値の総和（トレース）であるため、等比数列の和として計算できる。

$$\dim_q(V_l) = \sum_{k=0}^{l-1} q^{(l-1)-2k} = q^{l-1} + q^{l-3} + \cdots + q^{-(l-3)} + q^{-(l-1)}$$
$$= \frac{q^{l-1}(1-(q^{-2})^l)}{1-q^{-2}} = \frac{q^{l-1} - q^{-l-1}}{1-q^{-2}} = \frac{q^l - q^{-l}}{q - q^{-1}}$$

この結果は q整数と呼ばれ、記号 $[l]_q$ で表される。すなわち、$\dim_q(V_l) = [l]_q$ である。

具体例として、低次元の場合は以下のようになる。

- $l = 1$（自明表現）: $\dim_q(V_1) = 1 = [1]_q$
- $l = 2$（スピン 1/2）: $\dim_q(V_2) = q + q^{-1} = [2]_q$
- $l = 3$（スピン 1）: $\dim_q(V_3) = q^2 + 1 + q^{-2} = [3]_q$

定理 (量子 Weyl の次元公式)

一般の $U_q(\mathfrak{g})$ において、最高ウェイト λ を持つ有限次元既約表現 V_λ の量子次元は、正ルートに関する積として以下の公式で与えられる。

$$\dim_q(V_\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{q^{(\lambda+\rho,\alpha)} - q^{-(\lambda+\rho,\alpha)}}{q^{(\rho,\alpha)} - q^{-(\rho,\alpha)}} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{[(\lambda+\rho,\alpha)]_q}{[(\rho,\alpha)]_q}$$

解説（証明の概要）

一般の表現 V はウェイト空間 $V = \bigoplus_\mu V_\mu$ に分解される。$K_{2\rho}$ は V_μ 上でスカラー $q^{2(\rho,\mu)}$ 倍として作用する。したがって、

$$\dim_q(V) = \mathrm{Tr}(K_{2\rho}|_V) = \sum_\mu \dim(V_\mu) q^{2(\rho,\mu)}$$

となる。この指標の和に対して Weyl の指標公式 (Weyl character formula) の量子群類似を適用し、分母と分子の特殊化を行うことで上記の積の公式が導出される。パラメータ $q \to 1$ の古典極限をとると、ロピタルの定理により $[n]_q \to n$ となり、古典的な Lie 代数の Weyl の次元公式 $\prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{(\lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)}$ を正しく復元する。■

引用文献

- Kassel, C. (1995). *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0783-2
- Etingof, P., Gelaki, S., Nikshych, D., & Ostrik, V. (2015). *Tensor Categories*. Mathematical Surveys and Monographs, 205. American Mathematical Society. https://bookstore.ams.org/surv-205
- Chari, V., & Pressley, A. (1994). *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press. https://books.google.co.jp/books/about/A_Guide_to_Quantum_Groups.html?id=bn5GNkLfnsAC